

RASSEGNA TEATRO E SCIENZA 2016

27 OTTOBRE 2016 - Torino, AULA MAGNA POLITECNICO

I rapporti tra matematica e musica nei Pitagorici



F. Bronnikov

(1869)

*Inno dei pitagorici
al sole che sorge*

Musica e Matematica

Musica e Matematica sono da sempre indissolubilmente legate tra loro, fin dalle origini, e l'evoluzione di concetti propri ad una delle due spesso ha influenzato l'altra (o ne è stata influenzata).

Alcuni esempi di 'abbinamenti' di concetti musica/matematica:

- Ritmo-tempo/numerazione
- Durata di note e pause-suddivisione della battuta in parti / numeri razionali
- Metro-struttura di battute / metrica
- Pentagramma / rappresentazione grafica nel piano
- Canoni / isometrie (traslazioni-rotazioni-simmetrie-glissosimmetrie)
(**Bach, Variazioni Goldberg**: un tema semplicissimo subisce 30 elaborazioni, di cui tutte quelle multiple di 3 sono canoni; usa quasi tutte le possibili isometrie del piano)

Musica e matematica secondo Leibniz

Questa è la definizione che LEIBNIZ dà della musica:

***Exercitium arithmeticae occultum
nescientis se numerare animi***

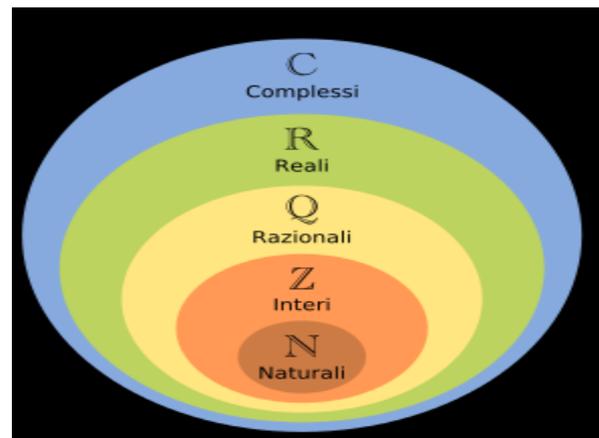
*(la musica è) un esercizio nascosto di aritmetica
fatto da un animo che non sa di contare*

da *Epistolae ad diversos*, lettera 154 a Goldbach, 1712



Influenza musica - matematica

Quanto all'influenza reciproca, pensiamo ad esempio - al **problema di ampliare gli insiemi numerici** (dai naturali agli interi ai razionali ai reali ai complessi) :



Alcuni di questi ampliamenti potrebbero essere stati pensati non per pure necessità matematiche, ma anche dall'esperienza di musicisti che nel corso dei secoli hanno avuto necessità di fissare **nuove scale musicali** per risolvere precisi **problemi armonici** (o anche problemi filosofici o estetici, o mistici); e forse potrebbero essere spiegati (e meglio compresi) non in base ad astratte relazioni di equivalenza (così come spesso le insegniamo ai nostri alunni), ma spiegando quali regole hanno trovato i musicisti per creare le nuove scale (o i filosofi per completare le loro teorie).

Pitagora: la Musica e la Matematica

Il primo studioso ad avere stabilito una correlazione tra matematica e musica è stato **Pitagora** (560-480 a.C.)

Il suo pensiero ci è noto solo indirettamente (visto che non lasciò scritti e la sua figura è avvolta nella leggenda) attraverso scritti di altri filosofi. I suoi studi influenzarono però l'estetica musicale fino oltre il medioevo.

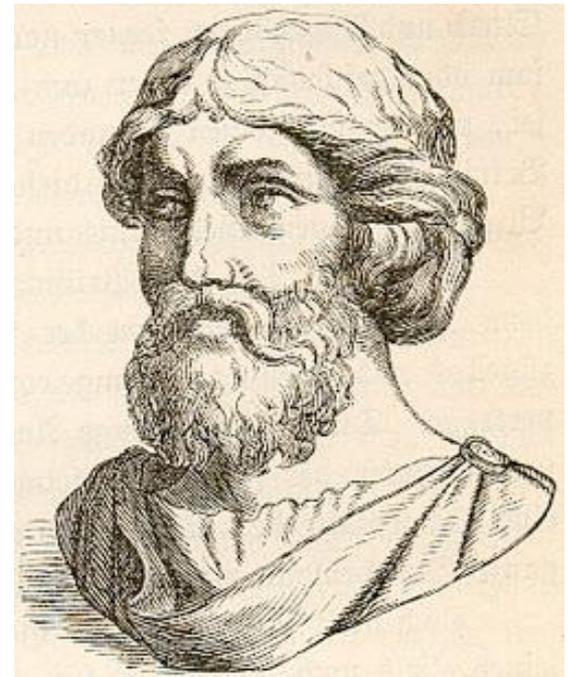
I pitagorici, come molti greci del loro tempo praticavano la musica a scopi catartici, come trait d'union tra corpo e spirito (ricordiamo che Apollo era dio della medicina e della musica).

Scrive **Aristosseno**:

‘ I pitagorici usavano medicine per purificare il corpo e musica per purificare la mente ’

Pitagora, cercando di comprendere perché alcune successioni di suoni fossero piacevoli, e altri no, e se in esse ci fosse una regolarità nascosta, scoprì come le altezze dei suoni fossero legate tra loro da precisi **rapporti numerici** ovvero da **numeri razionali**.

La scoperta avvenne, secondo l'aneddoto tramandataci da **Giamblico**, passando davanti all'officina di un fabbro che martellava il ferro con mazze di grandezze diverse. Tra i tintinnii che i colpi producevano sulle incudini, alcuni risultavano più gradevoli di altri; Pitagora scoprì che martelli i cui pesi stavano in precisi rapporti producevano suoni 'consonanti'.



I dischi di Ippaso

Ippaso, uno dei migliori allievi della scuola di Pitagora a Metaponto, ispirato dai martelli del fabbro costruì uno strumento analogo, costituito da 4 dischi di bronzo, tutti dello stesso diametro ma di diverso spessore:

il primo disco aveva spessore $\frac{4}{3}$ del secondo, $\frac{3}{2}$ del terzo e 2 volte il quarto.

I dischi potevano oscillare liberamente, e quando li percuoteva, producevano suoni piacevoli, intervalli 'consonanti'.

Il poeta e musicista Glauco di Reggio utilizzava questo strumento: come riporta

Platone nel *Fedro*

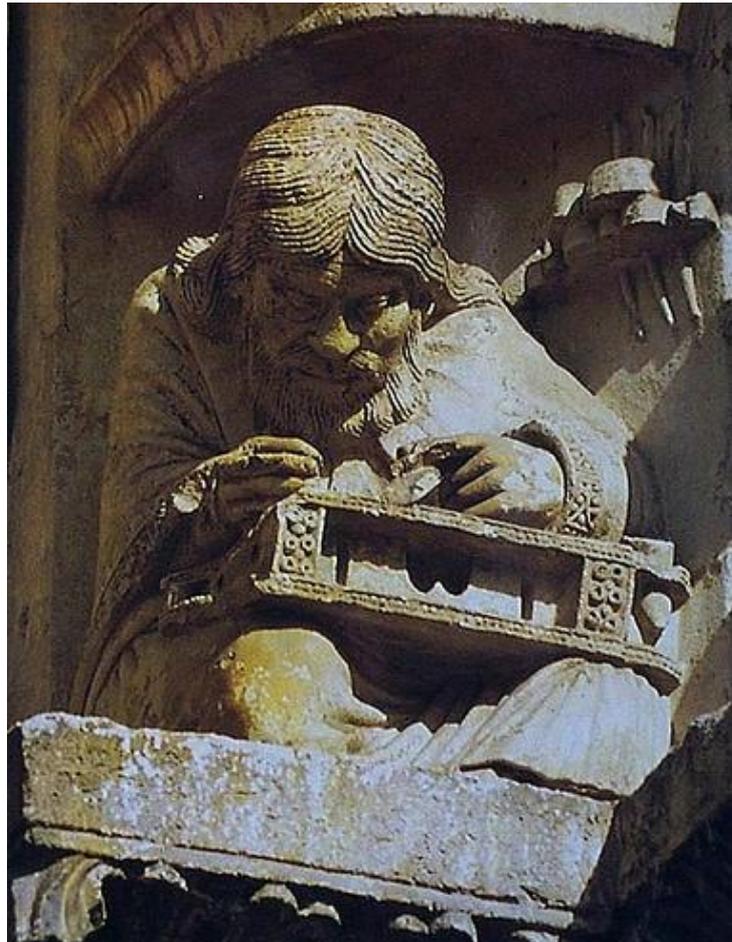
Glauco, osservata l'armonia dei suoni prodotti dai dischi, per primo si servì di essi per suonare: ora è appunto da questa sua attività che ancora si dice "arte di Glauco"

Hermeias, *Scholía in Platonis Phaedrum*



Ispirato da quanto sentito, Pitagora costruì il **kanon**, o **monocordo**, uno strumento con una corda elastica (nervi di bue) messa in tensione grazie a pesi differenti e studiò i suoni prodotti variando le tensioni.

Scopri che la consonanza tra coppie di suoni si ripeteva quando tali tensioni stavano fra loro in rapporti numerici collegati con quelli tra i pesi dei martelli del fabbro: i rapporti 2:1, 4:3, 3:2.



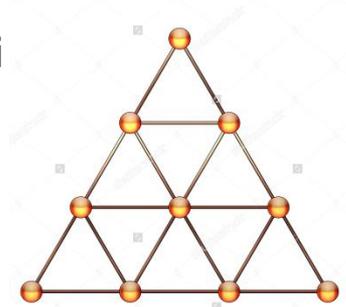
Scultura sulla
cattedrale di Chartres

*Pitagora concentrato
sul monocordo*

Rapporti numerici e consonanze

I rapporti numerici 2:1, 4:3, 3:2 sono le consonanze fondamentali in base alle quali si accordano gli strumenti a corda (le ottave, le quarte, le quinte) .

Oggi sappiamo che questi sono i rapporti delle frequenze, ma i pitagorici non lo potevano sapere, non potevano misurare il numero di oscillazioni di una nota; ma che questi rapporti numerici avessero a che fare con le lunghezze delle corde, e queste con gli intervalli tra i suoni, era stata la loro fondamentale scoperta, tanto più importante per loro perché tali rapporti coinvolgono solo i numeri 1,2,3,4: la **tetraktys**.



Pensarono poi di comporre gli intervalli secondo precise regole di calcolo, connettendo tali rapporti, e crearono la scala pitagorica; osservarono che i suoni che prodotti non seguendo queste regole sono suoni ‘impuri’, non gradevoli all’orecchio; viceversa, quelli prodotti seguendole risultano ‘consonanti’. Dunque, gli esatti rapporti numerici determinano non solo una corretta accordatura, ma anche la bellezza dell’intonazione.

Questa regola estetica relativa alle lunghezze delle corde che, se in precisi rapporti tra esse, producono bellezza e armonia, pervase tutta la sua filosofia.

Pitagora e i suoi discepoli mescolarono **musica, teoria dei numeri, filosofia** e **misticismo** in una misura forse senza uguali.

Universo= Armonia+numero

Ascoltiamo una testimonianza, un filosofo (quasi) vicino a Pitagora, **Aristotele** (384-322 a. C.)
[*Metafisica*, A 5, 985-6]

Essendosi applicati allo studio delle matematiche, per primi le fecero progredire, e approfonditisi in esse, si formarono l'opinione che i loro principi fossero i principi di tutte le cose esistenti.

E, poiché dei principi matematici i primi sono per natura i numeri, nei numeri essi credevano di scorgere molte somiglianze con ciò che esiste o diviene, più che nel fuoco o nella terra o nell'acqua.

*Così, per esempio, una certa proprietà dei numeri era per loro giustizia, un'altra anima e mente, un'altra ancora punto giusto, e così via si può dire per ognuna. Vedendo poi ancora che le note e gli intervalli delle gamme musicali consistevano in numeri, e che infine in ogni cosa tutta la natura sembrava assimilarsi ai numeri e i numeri apparivano primi tra tutte le cose della natura, furono indotti a supporre che gli elementi dei numeri fossero elementi di tutte le cose esistenti e tutto quanto il cielo fosse **armonia e numero**.*



Matematica \cong Musica \cong Armonia dell'Universo

Anziché rifarsi ai quattro elementi (aria, acqua, terra e fuoco- come Talete o Eraclito) Pitagora decise che l'essenza del mondo (così come quella del suono) è il **numero**.

Poiché i rapporti di lunghezza di corde che producono suoni consonanti sono sempre quelli che danno l'ottava, la quinta e la quarta, ne dedusse che dietro la bellezza della musica c'è una regolarità nascosta, non creata da noi e immutabile, e che regolarità aritmetiche o geometriche simili devono celarsi dietro la complessità della natura. Secondo P., tutto può essere reso numericamente, a partire dai numeri 1,2,3,4, che costituivano la *tetraktys*. La natura ha una struttura razionale (= retta da numeri razionali): nei numeri c'è un potere, forse il potere stesso che ha creato l'universo.

I **numeri** sono la **chiave del sapere**, della conoscenza che può innalzare l'anima fino all'immortalità.

La **musica** è la concreta realizzazione della corrispondenza tra numeri e cose, la **scienza concreta dei numeri**, in cui i rapporti sono direttamente percepibili.

Di qui partì il suo pensiero filosofico numerico-ordinativo, l'ipotesi che l'Universo fosse retto da un'armonia universale, dove i movimenti dei vari corpi celesti erano regolati da rapporti numerici precisi, e che muovendosi producevano suoni – da noi non percepibili – e tutti insieme costituivano l'armonia delle sfere .

Per Pitagora, c'è *isomorfismo*

Matematica \cong Musica \cong Armonia dell'Universo

La scuola di Atene



Raffaello – *La Scuola di Atene* Musei Vaticani

La Musica contribuisce alla Matematica

La musica doveva essere ben importante, per i greci, se Pitagora partendo da essa ha concepito un tale sistema di pensiero.

La **musica già esisteva**, e non aveva avuto bisogno di altro se non dei propri suoni, dell'orecchio e dell'apparato cognitivo umani per giudicarli, per riprodurli, per ricomporli; la matematica, invece, stava nascendo allora.

La **matematica nasce in parte ispirata dalla musica**: si percepisce un ordine con l'orecchio, se ne cercano dei termini descrittivi → si sviluppa la matematica

Il kanon

Pitagora perfezionò il kanon fissando ai due estremi una corda sopra una scala graduata e variando la lunghezza della corda premendola in diversi punti.

- Se la corda ha lunghezza L , pizzicando la corda libera
→ lunghezza L , frequenza f
(ad es. DO_4 – il DO centrale del pianoforte).
- Se premeva la corda a metà della sua lunghezza
→ lunghezza $1/2 L$, frequenza $2f$: DO_5 (intervallo di **ottava**) → rapporto 2:1
(suono intonato una ottava sopra)
- Se la divideva in quattro parti uguali
→ lunghezza $3/4 L$, frequenza $4/3 f$: FA_4 (intervallo di **quarta**) → rapporto 4:3
- Se la premeva in modo da dividerla in tre parti uguali
→ lunghezza $2/3 L$, frequenza $3/2 f$: SOL_4 (intervallo di **quinta**) → rapporto 3:2
(se si preme a lunghezza $1/3 L$ - frequenza $3f$ - si ha SOL_5 - una quinta sopra l'ottava)

Osserviamo che i numeri coinvolti sono solo 1,2,3,4

Rapporto lunghezze	Rapporto frequenze	Intervallo (consonante)
1 : 2	2 : 1	ottava
2 : 3	3 : 2	quinta
3 : 4	4 : 3	quarta

La scala pitagorica

Partendo dalle sole divisioni per 2 (ottava) e per 3 (la quinta), Pitagora pensò di generare tutti i suoni della scala, nel seguente modo:

partiamo da un suono di base, che chiamiamo DO_1 , e consideriamolo di frequenza unitaria: $f=1$; moltiplicando -o dividendo- successivamente per $3/2$ (cioè salendo - o scendendo - di una quinta) si ottengono una successione di quinte che poi possono essere ricondotte in un'unica ottava per formare la scala, dividendo (o moltiplicando) per 2.

$$DO_1 \times 3/2 \rightarrow SOL_1 = 3/2$$

$$SOL_1 \times 3/2 = 3/2 \times 3/2 = 9/4 (>2) = RE_2; RE_2 = 9/4 : 2 \rightarrow RE_1 = 9/8$$

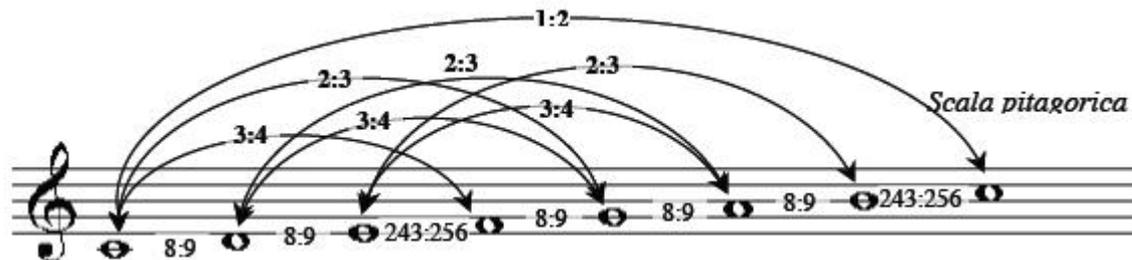
$$RE_1 \times 3/2 = 9/8 \times 3/2 = 27/16 \rightarrow LA_1 = 27/16$$

$$LA_1 \times 3/2 = 27/16 \times 3/2 = 81/32 (>2) = MI_2; MI_2 = 81/32 : 2 = 81/64 \rightarrow MI_1 = 81/64$$

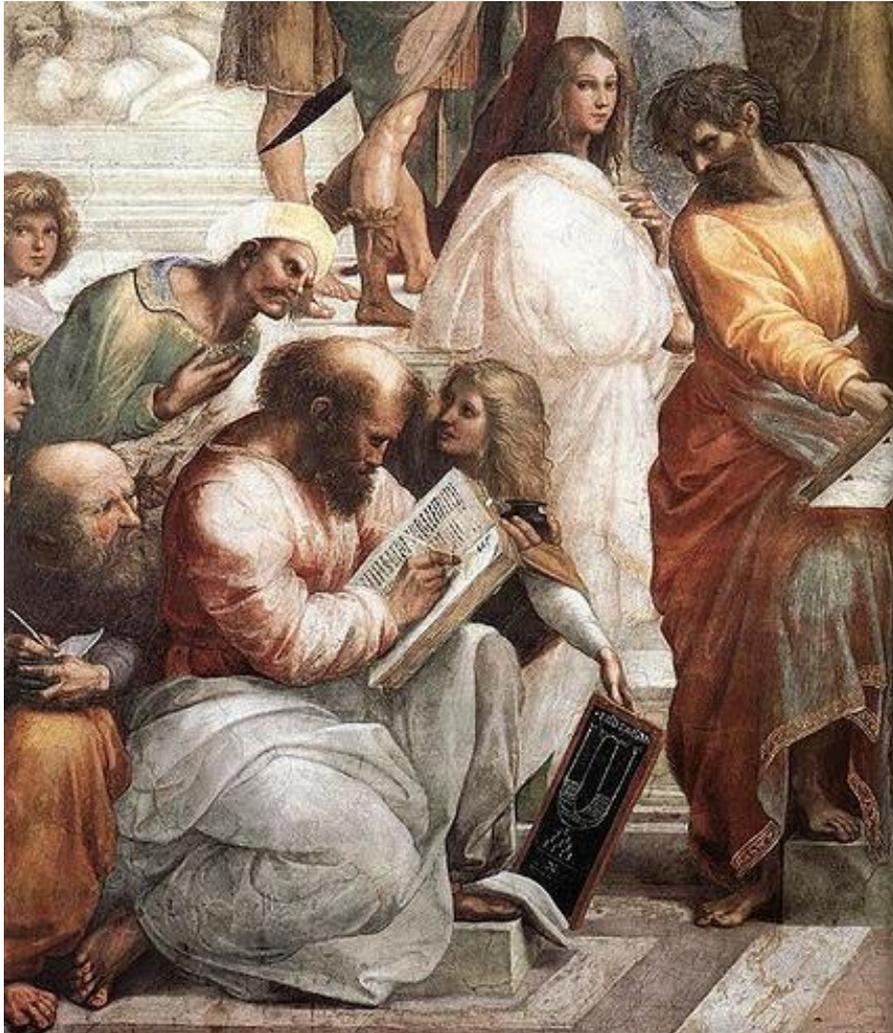
$$MI_1 \times 3/2 = 81/64 \times 3/2 = 243/128 \rightarrow SI_1 = 243/128$$

Per ricavare FA_1 , potremmo prendere la quarta sopra il DO_1 ; ma se vogliamo procedere solo per quinte, scendiamo di una quinta da DO_1 , ricavando FA_0 (nell'ottava precedente) e poi raddoppiamo:

$$DO_1 : 3/2 = 2/3 = FA_0; FA_0 = 2/3 \times 2 = 4/3 \rightarrow FA_1 = 4/3$$

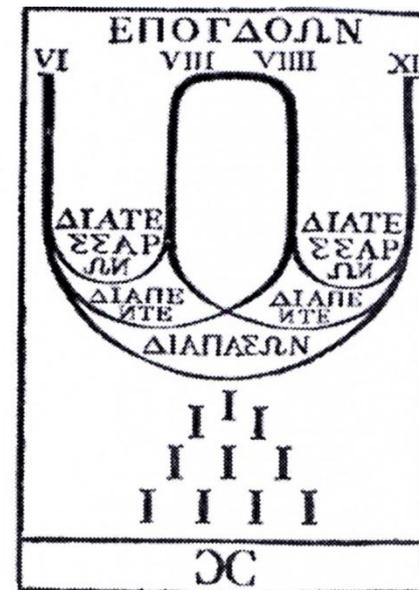


Pitagora nella *Scuola di Atene*

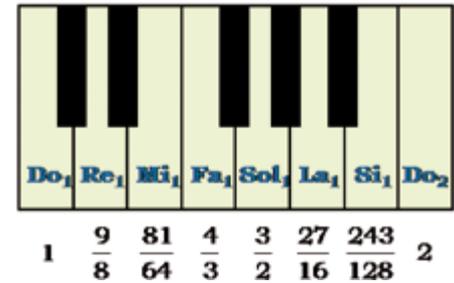


In mano al suo allievo: schema della divisione dell'ottava musicale secondo Pitagora. La suddivisione prevede due intervalli di quarta (*Diatéssaron*, rapporto 3:4, nell'immagine VI-VIII e VIII-XII), due di quinta (*Diapente*, rapporto 2:3, VI-VIII e VIII-XII), uno di ottava (*Diàpason*, rapporto 1:2, VI-XII) e un tono intero, (*Epògdoon*, rapporto 8:9, VIII-VIII).

Sotto: la *Tetraktys*



L'ottava pitagorica



Osserviamo la scala pitagorica e i rapporti tra le note:

Nota	DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO
Rapporto con la nota prec.		9/8	9/8	256/243	9/8	9/8	9/8	256/243
Rapporto con la fondam.	1 / 1	9 / 8	81/64	4 / 3	3 / 2	27/16	243/128	2 / 1

I rapporti di frequenza tra suoni consecutivi sono **solo due**: il rapporto $9/8 = 1.125$ (**tono**) e il rapporto $256/243 \cong 1.05349\dots$ (**semitono**)
 I rapporti in frequenza tra le possibili coppie di note nell'ottava sono **rigorosamente** dei numeri razionali (anche se alcuni numeri delle frazioni sono molti grandi!): ciò rendeva felice Pitagora (e la sua concezione filosofica di un universo armonico).

MA....

Limiti della scala pitagorica

La scala in tal modo ottenuta era adatta per la melodia semplice eseguita da un unico strumento, per le composizioni monodiche o per la polifonia medioevale, in cui gli accordi principali erano solo di quinta e di ottava e fu praticamente utilizzata fino al '500. Con l'affermarsi del canto madrigalistico si sviluppò la polifonia, e i limiti vennero a galla...

I rapporti di *terza* e *sesta* (DO-MI: 81/64) e (DO-LA: 27/16) utilizzano numeratori denominatori elevati, e quando sono utilizzati assieme ad altre note della scala, danno luogo ad **accordi poco consonanti** (e come tali erano considerati anche dai Pitagorici, come tutti quelli le cui frazioni contenevano numeri superiori al 4). Un analogo problema si pone per l'intervallo di *settima* (DO-SI: 243/128). Nasce l'idea di *'temperare'*, cioè aggiustare a mano gli intervalli poco consonanti. Gli intervalli risultanti si scontrano con l'esigenza di dover modificare l'**intonazione** degli strumenti al cambiare della nota di partenza - ossia al **cambiare della tonalità**. Nasce l'idea di dividere l'ottava in parti uguali – o proporzionali - per evitare tale problema.

Questo è il problema del **temperamento**: un problema musicale affrontato ripetutamente nei secoli da matematici e musicisti; i vari tentativi di soluzione hanno stimolato l'ingegno di entrambi e contribuito al raggiungimento di risultati significativi in entrambi i campi.

Nella successiva figura sono rappresentati alcuni dei matematici e musicisti che si occuparono del problema: a partire dal pitagorico Archita e dall'aristotelico Aristosseno per arrivare alla neopitagorica Società per le Scienze Musicali e a Bach.

Temperamento

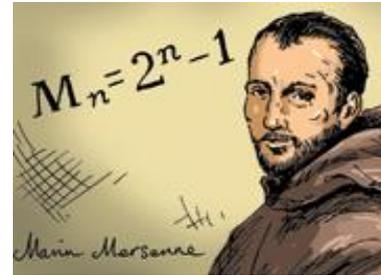
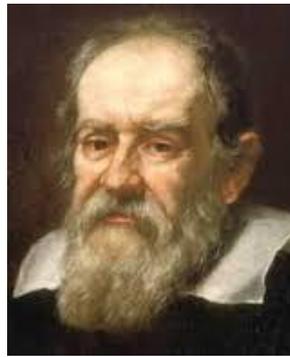
come discretizzare una quantità fisica continua

Temperamento = aggiustamento di alcuni intervalli tra alcune note per accordare gli strumenti musicali.

Per estensione, sono anche le scale musicali che derivano dai diversi modi di temperamento.

*Temperamento
inequabile*

Mersenne
Werckmeister
Bach (Buon Temp.)



*Temperamento
naturale*
(Archita) Zarlino
Vincenzo Galilei

18



Temperamento pitagorico
Pitagora

Temperamento equabile
(Aristosseno) Simon Stevin

